14/5/19

Φυλλάδιο 3

⑥ Στο $\mathbb{R}$ $\rho(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Να δειχθεί ότι η μετρική ρ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική ($d(x,y) = |x-y|$) και ο $(\mathbb{R},\rho)$ δεν είναι πλήρης

Λύση: $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι 1-1 και επί συνεχής και η αντίστροφη της $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ είναι επίσης συνεχής.

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $x_n \to x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \arctan x_n \to \arctan x \Leftrightarrow |\arctan x_n - \arctan x| \to 0$ $\Leftrightarrow \rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho} x$
Επομένως, η ταυτοτική συνάρτηση $I : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \rho)$ είναι ομοιομορφισμός. Άρα οι μετρικές ρ και d (= η συνήθης) είναι ισοδύναμες

Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n$, τότε:
(Έχουμε ότι $\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$)
$\arctan n \to \pi/2$ άρα η ακολουθία $(\arctan n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, δηλ. αν $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geq n_0$
$|\arctan n - \arctan m| < \varepsilon$
$\quad\parallel$
$\rho(n,m) < \varepsilon$ $\qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0$
$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Άρα η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $(\mathbb{R}, \rho)$